



LA MACHINE MYSTIQUE

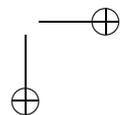
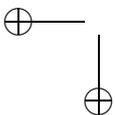
BRUNO MARCHAL

Résumé

Peut-on opposer ou même séparer la foi avec les acquis de l’activité scientifique? Le théorème de Gödel a souvent été utilisé pour rendre compte de cette séparation. Le caractère abusif de cette utilisation a été bien analysé ([42], [11]). Nous nous proposons d’affiner cette analyse dans le cadre de l’hypothèse du Mécanisme Digital. Nous montrons que le Mécanisme Digital aboutit à une forme de concordisme spirituel ontologique, épistémologique et éthique. En effet, dans ce cadre, la théologie, dans le sens des (néo) platoniciens de la Grèce antique, devient ou redevient une science, et même la science la plus fondamentale en ce sens qu’elle devient capable de justifier, en principe et conceptuellement, toutes les autres. Une notion naturelle de théologie des machines, incluant la physique, est définissable, par les faits mêmes de l’incomplétude de Gödel, et de la non définissabilité de la vérité (Tarski) et de la connaissance (Kaplan-Montague [15]). L’argumentation est constructive: elle montre précisément comment dériver la physique de l’informatique et de l’autoréférence. Cette *théologie des machines* est ainsi une science expérimentale, puisqu’on peut comparer la physique extraite de cette théologie avec les données empiriques.

1. *L’Hypothèse du Mécanisme Digital*

Nous définissons le Computationalisme, ou l’hypothèse du Mécanisme Digital, ou simplement Mécanisme, par la thèse selon laquelle il existe un niveau de description du cerveau, ou du corps, ou de l’univers telle que notre expérience subjective consciente demeure inchangée pour une substitution fonctionnelle digitale faite à ce niveau. Selon cette hypothèse nous pouvons survivre, dans le sens clinique usuel, à l’aide d’un cerveau artificiel, de la même façon qu’on peut déjà survivre avec un cœur ou un rein artificiel. Les acquis de la biologie apportent des évidences à cet égard, mais notre approche est d’ordre logique, et nous n’excluons pas que le Mécanisme puisse



mener un jour à une contradiction ou à une disparité avec les données de l'observation naturelle. Il n'y a pas lieu ici de défendre la vérité de cette hypothèse. Nous étudions seulement ses conséquences logiques.

Nous supposons pour simplifier que le cerveau biologique joue le rôle de l'organe de la conscience, mais cette hypothèse peut être considérablement affaiblie. Par exemple, 'l'organe' de la conscience peut être supposé être donné par l'entièreté de l'univers physique, observable ou non, en compagnie d'oracles, dans le sens de Turing. Nous supposons aussi la thèse de Church qui permet d'identifier les fonctions calculables avec les fonctions programmables par machine de Turing ou par un ordinateur de von Neumann. La thèse de Church fait de toute machine digitale universelle une machine authentiquement universelle pour les tâches de calcul et de simulation de processus digitaux. On notera que l'incomplétude est une conséquence quasi-directe de la thèse de Church: l'existence d'une machine universelle pour le calcul entraîne la fermeture de l'ensemble des fonctions calculables pour l'opération de diagonalisation, ce qui interdit à toute théorie effective de conclure à coup sûr à la partialité ou à la totalité des fonctions calculées ([27]). La calculabilité apparaît dès lors comme une notion absolue ne dépendant pas du formalisme utilisé, à la différence de la prouvabilité que l'incomplétude rend toujours relative et dépendante de la théorie ou du choix de la machine produisant des preuves.

Rappelons rapidement une conséquence de l'hypothèse du mécanisme, qui ne dépend pas a priori de l'incomplétude et qui est sans doute surprenante *du point de vue naturaliste Aristotélicien*. Si on peut survivre avec un cerveau digital artificiel, on peut comprendre que 'nous' avons une nature non substantielle. Nous pouvons "sauver notre âme" sur une disquette, et utiliser, en principe, chaque jour, un différent corps matériel, au gré de nos besoins. Un corps matériel semble à première vue indispensable pour permettre la manifestation de cette âme relativement à notre environnement *apparemment* matériel, mais cette idée ne résiste pas à l'analyse. Il est en effet possible de montrer que l'immatérialité de l'âme va nécessairement se contagier à l'environnement physique et à tous les environnements possibles ([21, 28]). Des expériences par la pensée laissent peu de doutes à ce sujet: si l'âme, dans le sens général du connaisseur de sa propre conscience et intériorité, peut survivre à une substitution fonctionnelle et digitale du corps ou du cerveau la portant, elle ne peut discerner la différence avec certitude entre le rêve et la réalité, entre la réalité et la réalité virtuelle informatique, mais aussi, c'est un point plus délicat, entre la réalité virtuelle informatique et la réalité arithmétique. De plus, elle peut comprendre d'elle-même que son devenir sera déterminé par l'ensemble de tous les calculs possibles capable d'accéder à son état computationnel 'actuel', ce qui permet de redéfinir sa physique possible par une mesure mathématique portant sur cet ensemble de calculs, lesquelles sont déjà définissables dans l'arithmétique élémentaire. Ceci est

dû principalement à l'existence d'une indétermination intrinsèque de la première personne, lorsqu'une machine se trouve dupliquée à son niveau de substitution mécaniste digital, ou en dessous de ce niveau, qui existe par hypothèse [21, 24, 25, 26].

Ceci permet de dériver très rapidement des conséquences observables physiquement, et par ailleurs déjà "observées par les physiciens: à savoir un indéterminisme à la première personne (et même à la première personne du pluriel — correspondant à des duplications de populations de machines), une non-localité des événements physiques possibles, et une non-clonabilité de la substance apparente dont le corps et l'environnement semble nécessairement être constitué du point de vue de tout observateur, fut-il immatériel. Les bizarreries quantiques réapparaissent ainsi naturellement, de façon qualitative, par le truchement du plongement du sujet, en l'occurrence le mathématicien-machine dans l'objet de son étude, l'arithmétique. Le quantique semble être déjà, à ce stade, une vision à la première personne (du pluriel) d'une réalité digitale par elle-même. On voit que le Mécanisme oblige de généraliser le plongement du sujet physicien dans le monde physique, décrit par le formalisme quantique ([10]), ce qui conduit à une interprétation naturelle de type *many worlds* de la vérité arithmétique.

Malheureusement, il est extrêmement difficile de définir ou d'isoler, de façon quantitative, cette mesure de l'incertitude relative des observations. Les expériences par la pensée permettent de comprendre qu'il est impossible pour une machine de connaître avec certitude son niveau de substitution. La logique confirme qu'en réalité, si nous sommes des machines, nous ne pouvons pas savoir de quelle machine il peut s'agir, ce qui sera examiné plus loin. Mathématiquement, l'ensemble ou la structure de l'ensemble des calculs possibles est infiniment complexe. Il n'y a pas de méthode directe disponible. Nous pouvons cependant étudier la logique des observations possibles en "interviewant" directement une machine universelle. Ceci peut sembler étrange, mais résulte essentiellement de deux phénomènes: les limitations internes de la machine, et le fait moins connu qui est que la machine, ou un certain type de machine, est capable de découvrir, par une forme d'introspection, ses propres faits de limitations internes, et de les transcender de différentes façons. Ceci nous conduit à examiner à présent le rôle des limitations Gödéliennes des machines par rapport à leurs possibles théories au sujet de leurs réalités spirituelles, mentales et physiques.

2. Gödel, Esprits et Machines

Le théorème d'incomplétude de Gödel, et de façon plus générale, les résultats sur les limitations des formalismes ont été abondamment utilisés par les détracteurs de l'hypothèse du Mécanisme Digital (par exemple [20], [3],

[30]), mais aussi plus rarement par ceux qui défendent la plausibilité de cette hypothèse (Judson Webb [42]), ou qui se contente d'étudier les conséquences de cette hypothèse (Marchal [21, 24, 25, 26]). Le caractère invalide des arguments Gödéliens anti-mécanistes ont été bien étudiés. Nous reviendrons plus loin sur cette question. Comme l'a fait remarquer Judson Webb, ce genre de réfutation est "double-edged" en ce sens que ces réfutations sont soit trop informelles pour être convaincantes, soit, une fois précisées, elles sont accessibles aux machines elles-mêmes, et réfutables par les machines elles-mêmes. Nous illustrerons ceci précisément plus loin car cela fait partie de l'introspection naturelle de la machine. Cela montre que les réfutations de Lucas et Penrose, bien qu'erronée, sont très intéressantes, car elles mettent en évidence la difficulté majeure du problème.

Dans son remarquable ouvrage sur les limitations internes des formalismes, Jean Ladrière, ne tombe pas dans le piège de Lucas et Penrose consistant à user de l'incomplétude pour distinguer l'homme de la machine, mais il analyse correctement l'ampleur du *saut* entre les notions de preuve et de vérité formelles et les notions de preuve et de vérité intuitives. Il saisit la véritable leçon de l'incomplétude qui finit par se révéler être un vaccin efficace contre les projets totalitaires et réductionnistes dans le domaine de la pensée, sans conclure qu'il s'agit là de faits de limitations qui concerneraient exclusivement la machine. L'incomplétude ne se limite pas à contredire la velléité d'une conception réductionniste de l'humain, mais il s'oppose tout autant au réductionnisme de la notion de machine et de ses possibilités, ce que nous allons illustrer à présent, en montrant notamment que l'incomplétude permet de traduire littéralement la théorie classique de la connaissance (Théétète [7, 8, 29]) dans la théorie du Mécanisme Digital.

3. *La Machine à la Recherche de son Âme*

La technique de diagonalisation, bien connue par les logiciens, a résolu de façon conceptuelle un vieux problème de biologie que Descartes ne sut résoudre: le problème de la reproduction. De même le biologiste Driesch utilisa le phénomène apparenté de la régénération du vivant et de l'embryogénèse pour défendre le vitalisme, et là aussi la technique de diagonalisation offre une solution transparente [23]. L'idée de base est facile à esquisser sommairement. Une première diagonale est donnée par un duplicateur D , qui appliqué à une machine X produit une description de X appliquée à elle-même: XX . La deuxième diagonale consiste à appliquer D à lui-même, DD , et on voit que l'évaluation de cette expression produira une description d'elle-même: DD produit DD . Au lieu d'utiliser un simple duplicateur (DX donne XX), on peut utiliser une forme plus générale, qui envoie X sur une transformation calculable quelconque T : DX donne $T(XX)$, si

bien que DD produit $T(DD)$. Ceci permet de concevoir une notion effective d'autoréférence. Cette diagonalisation est à la base de l'informatique théorique (second théorème de récursion de Kleene [16]) et à la base de la démonstration par Gödel de l'incomplétude (lemme de diagonalisation [12, 9]). Gödel montre d'abord que le formalisme d'une théorie assez riche (comme Principia Mathematica ou l'arithmétique de Péano) peut définir en son sein sa propre notion de prouvabilité (*Beweisbar*), et il montre que le formalisme peut appliquer la diagonalisation décrite ci-dessus pour générer un énoncé qu'il peut démontrer équivalent à sa propre non prouvabilité. Il est alors relativement aisé, en supposant que le formalisme, ou mieux, une machine démonstratrice correspondant à ce formalisme¹, est consistante (le faux n'est pas prouvable), normale (si la machine prouve p , elle prouve qu'elle prouve p) et stable (si la machine prouve qu'elle peut prouver un énoncé, alors elle peut effectivement prouver cet énoncé), de se convaincre qu'un tel énoncé, affirmant sa propre non prouvabilité, est d'office vrai et non prouvable par la machine. De même, il est facile, usant de cette diagonalisation et du fait que la machine peut la manipuler elle-même, de se convaincre de façon générale qu'il est impossible de définir formellement la notion de vérité d'une proposition arbitraire dans le langage de la machine. En effet, comme l'ont vu Gödel et Tarski, cela permettrait de transformer le paradoxe d'Épiménide en une contradiction.

Dans ce qui suit, nous allons considérer une machine normale et stable, et dont les énoncés, ou "croyances" sont fermées pour les principes de logique classique (tautologies du calcul propositionnel, règle du modus ponens). Elle doit être assez "riche" que pour pouvoir prouver sa propre normalité. Une telle machine sera Σ_1 -complète (capable de prouver l'existence de nombres ayant des propriétés décidable), et capable de prouver sa propre Σ_1 -complétude. En fait la Σ_1 -complétude est l'équivalent arithmétique de l'universalité, et je qualifierai de "*machine Löbienne*" une machine² capable de prouver $p \rightarrow Bp$ pour tous les énoncés arithmétiques $p \Sigma_1$. Bp est lui-même Σ_1 , ce qui explique qu'une telle machine est à même de prouver sa propre normalité. Les lettres p, q, r, \dots représentent des propositions ou des énoncés du langage de la machine. " Bp " représente l'application du prédicat de prouvabilité, descriptible dans le langage de la machine appliquée à un énoncé fixé, Σ_1 ou quelconque, représenté par un terme existant dans son langage (un "nombre de Gödel").

¹Un théorème dû à Craig permet d'identifier une théorie axiomatisable avec une machine.

²Du nom de Martin Löb. Logicien hollandais responsable d'une généralisation importante du théorème de Gödel. Voir plus bas.

Nous aimerions alors aborder la question de la connaissance possible de la machine. En fait nous proposons de construire un lexique traduisant les notions de la théologie néoplatonicienne en terme d'arithmétique et d'informatique théorique [32, 34, 33, 27].

4. *L'UN, et le Monde Intelligible*

Nous sommes d'accord avec Hirschberger lorsqu'il affirme que le Dieu de Platon, c'est la *vérité* [14]. Un premier axiome sur lequel agrèent de nombreux théologiens et mystiques appartenant à de nombreuses traditions est le caractère innommable et indescriptible de Dieu. Le mot "Dieu" lui-même, et le mot "UN" que Plotin utilise, doivent être considéré comme des pointeurs sur une réalité qui nous transcende de façon absolue [38]. Il est alors tentant de considérer la notion de vérité arithmétique comme au moins une sorte d'approximation du Dieu possible de la machine. La machine peut l'approximer de diverses manières, mais, par le théorème de Tarski, elle est incapable de définir cette notion au sein de son langage. Par le théorème de Gödel et l'étude des degré d'insolubilité, nous savons que la vérité arithmétique, représentée par exemple par l'ensemble des nombres de Gödel des propositions arithmétiquement vraies, est d'une complexité "arithmétique" maximale, et les machines, et apparemment les humains, ne sont qu'à même seulement de gratter la surface de cette réalité. Le caractère non "nommable", par la machine Löbienne, et le fait que cette réalité est, en un certain sens, maximale, nous invitent à lui faire tenir le rôle du UN dans une interprétation sur base de l'arithmétique pour la théologie de la machine. En effet, la machine est à même de prouver, de façon indirecte, son propre théorème de Tarski, [2], comme elle est à même de prouver son propre théorème de Gödel. En résumé, si on admet l'équivalence platoniste entre Dieu et la vérité, on admettra l'équivalence, pour une machine Löbienne, entre sa possible notion de Dieu et la vérité arithmétique. Il conviendra d'être prudent, car cette correspondance n'est pas accessible à la machine, qui devra se contenter de *l'espérer*.

La réalité intelligible, ou le Noûs, de Platon ou de Plotin, sera alors modélisé par la notion de prouvable, ou plus abstraitement par la logique de la prouvabilité. Le contenu arithmétique va ainsi varier de machines en machines, mais la logique de cette prouvabilité demeure invariante. La relation avec la raison, ou l'intellect est évidente. Plotin distingue la raison discursive de "l'homme" terrestre, et l'intellect divin, et cette distinction est réitérée par la machine universelle Löbienne dans la distinction entre la logique modal G et G^* . Ici, il est temps de citer le théorème fondamental de Solovay [37]. Existe-il une logique modale capturant la logique de la prouvabilité des machines Löbiennes? Le théorème de Solovay résout

positivement cette question. Si les lettres p représentent des propositions du langage de la machine, ou de l'arithmétique, nous pouvons définir récursivement une traduction R de la logique modale, de façon qu'elle commute sur les compositions booléennes, et, est définie, pour la clause principale de la modalité, par $R(Bp) = \text{beweisbar}(\ulcorner R(p) \urcorner)$. Le théorème de Solovay affirme que la logique de la prouvabilité de la machine Löbienne est donnée complètement, au niveau modal propositionnel, par la logique modale G , pour la partie prouvable par la machine, et par G^* pour la partie vraie. Par exemple G^* prouve la consistance de la machine ($\neg B\perp$), que bien sûr la machine ne prouve pas. G est le système suivant:

AXIOMES :	$B(p \rightarrow q) \rightarrow (Bp \rightarrow Bq)$	K
	$Bp \rightarrow BBp$	4
	$B(Bp \rightarrow p) \rightarrow Bp$	L
RÈGLES :	$\frac{p, p \rightarrow q}{q}$	MP
	$\frac{p}{Bp}$	NEC

L est mis pour Löb, et l'axiome L est la version formelle du théorème de Löb, qui affirme que si $Bp \rightarrow p$ est prouvable dans l'arithmétique, ou par une machine Löbienne, alors p est aussi prouvable. G^* est donné par:

AXIOMES :	Tous les théorèmes de G	
	$Bp \rightarrow p$	T
RÈGLE :	$\frac{p, p \rightarrow q}{q}$	MP

Notons que G^* perd la règle de nécessité, sans quoi on serait entraîné dans la dérivation de $B\perp \rightarrow \perp$, par réflexivité, ce qui entraînerait $B(B\perp \rightarrow \perp)$ par nécessité, ce qui par la formule de Löb, donnerait $B\perp$, et par réflexité encore: \perp . D'où $Bp =$ l'opinion ou le produit de la raison terrestre discursive (l'homme de Plotin) quand il est décrit au niveau de ce que la machine peut prouver, (logique G) et représente l'intellect divin, ou l'intelligence divine (le "Nous"), au niveau de la vérité (G^*). Ce sont des indexicaux, ceux-là même que l'autoréférence arithmétique permet de traiter et définir par diagonalisation. Le contenu arithmétique des propositions modales peut être très différent d'une machine à l'autre, mais les logiques reliant ces propositions en concordance avec les points de vue fondamentaux décrits plus bas, sont communes à toutes les machines Löbiennes.

5. La Première Personne, le Connaisseur ou l'Âme Universelle

La prouvabilité intuitive, si éloignée de la prouvabilité formelle comme le suggère Ladrière dans ses suggestions philosophiques ([17]) sur les limitations internes des formalismes, est celle du connaisseur. La première idée qui vient à l'esprit serait de définir le *connaissable* par le *prouvable*. Les philosophes de la tradition analytique s'accordent sur le fait qu'un opérateur C de connaissance, correspondant ou non à un possible prédicat numérique de machine, doit vérifier $Cp \rightarrow p$. Et bien sûr $B\perp \rightarrow \perp$ (avec \perp représentant une constante propositionnelle fausse) n'est pas démontrable (par le second théorème d'incomplétude). En générale, la connaissance introspective est décrite par la logique modale S4. Gödel avait déjà compris que la prouvabilité formelle ne pouvait pas jouer le rôle de la connaissance: la réflexivité de la connaissance ($Cp \rightarrow p$) contredit directement le second théorème d'incomplétude de Gödel: $B\perp \rightarrow \perp$ n'est pas prouvable, et B n'obéit donc pas à la logique modale de la connaissabilité S4. En fait le prédicat de Gödel, Bp , permet à la machine une autoréférence à la troisième personne, et ce que l'on cherche ici est une autoréférence à la première personne, dont on voudrait qu'elle soit d'office vraie, par définition de la connaissance (axiomatisée au moins par la réflexivité, et par la transitivité ($Cp \rightarrow CCp$) pour la connaissabilité). Le sujet, à la première personne, garde intact son cordon ombilical avec la vérité dont on peut penser qu'il est logiquement issu. La prouvabilité formelle concerne un corps objectif, ou une description de celui-ci, communicable intégralement à un éventuel observateur *autre* que lui-même. On peut douter de l'existence d'un tel prédicat. Le Bp de G ne fonctionne pas, mais le Bp de G^* non plus. Pour G^* , Bp n'est plus correct si on voulait l'interpréter comme auto-référentiel: par exemple, G^* prouverait sa *propre* consistance (G^* prouve $\neg B\perp$), tout en prouvant qu'il ne prouve pas "sa" consistance (G^* prouve $\neg B\neg B\perp$). En fait G^* , qui joue le rôle de l'intellect divin, ne parle pas de lui, mais de la machine, qu'il observe "du Ciel", si on peut dire. À première vue on pourrait penser être dans une impasse. Quel que soit le prédicat de connaissabilité, ou simplement un prédicat réflexif qu'on puisse trouver, on voit mal comment il pourrait échapper au joug de la diagonalisation sans perdre la nécessitation, comme G^* , ou la réflexivité, comme G .

Lorsque Socrate demande à Théétète de définir la connaissance, celui-ci fournit différentes réponses que Socrate critique et réfute rapidement. Théétète propose d'abord la sensation, que Socrate réfute par l'argument du rêve, puis l'opinion vraie, puis enfin l'opinion vraie accompagné d'une justification. Ceci nous invite à définir la connaissance de la machine par la prouvabilité de p accompagné de la vérité de p . Bien sûr, nous sommes incapable de définir la vérité dans le langage de la machine (par le théorème de Tarski), mais nous pouvons, pour chaque énoncé p du langage de la

machine, modéliser dans l'arithmétique la connaissance, en modélisant la vérité de p par p lui-même. Cela revient à définir un opérateur modale Cp par $Bp \& p$. L'interprétation arithmétique devient alors naturellement: $R(Cp) = \text{beweisbar}(\ulcorner R(p) \urcorner) \& R(p)$. Le théorème de Tarski empêche de traduire cet opérateur dans le langage de la machine, et ceci a été démontré inévitable pour tout opérateur de connaissance par Kaplan et Montague [15]. De même, Artemov a montré que si on exige $Cp \rightarrow Bp$, alors cette définition est l'unique choix pour modéliser la connaissance du sujet associé à la machine [1].

On peut alors démontrer que Cp est entièrement capturé par une extension de la logique modale S4. La logique S4Grz, c'est à dire $S4 + B(B(p \rightarrow Bp) \rightarrow p) \rightarrow p$, où bien sûr, ici " B " représente le carré modale abstrait de la logique modale, et non pas la prouvabilité formelle de Gödel³

On obtient donc un opérateur de connaissabilité, qui fait sens pour la machine, et qui n'est pas représentable dans le langage de la machine, et qui est donc non diagonalisable, ce qui lui permet d'être effectivement réflexif dans une logique fermée pour la nécessité. Cette logique S4Grz introduit naturellement une notion de temps subjectif proche de la définition de la conscience de Brouwer [40]. De fait, on sait depuis Grzegorzczuk que S4Grz donne une modélisation de type épistémique de la logique intuitionniste. Ceci permet d'attacher une logique de type intuitionniste au sujet correspondant à la machine, et capable de décrire la logique de l'évolution de sa connaissance. Qui plus est, on peut montrer que G et G^* ne différencient pas la logique de la connaissabilité. On peut écrire $S4Grz = S4Grz^*$ pour résumer ce fait. On trouvera une preuve dans les livres de Boolos sur la logique de la prouvabilité [5, 6]. Comme Boolos le suggère, ceci illustre que, du point de vue du sujet-machine, il y a une confusion de type intuitionniste entre la prouvabilité (informelle/intuitive) et la vérité [6]. Ceci rend compte aussi de nombreuses difficultés que rencontre Platon, Théétète et Plotin cf [32, 34]. Il va de soi qu'il n'y a pas lieu ici de prétendre que ces auteurs auraient accepté la solution *mécaniste*, bien que dans son chapitre sur les *Nombres* des rapprochements saisissant apparaissent et confirment l'existence d'une relation entre le Pythagorisme et la doctrine du Mécanisme. Certaines critiques "faites par" la machine universelle sont en fait assez semblable aux critiques implicites de Plotin faite par Proclus [38].

C'est l'incomplétude qui force la machine à distinguer sa prouvabilité effective à la troisième personne de sa prouvabilité intuitive, qui concerne une personne qu'elle ne peut pas nommer et qui rapproche l'Âme universelle de Plotin du *Dieu Intérieure*. L'âme est la conjonction de l'intellect (Bp) et de

³ Grz est mit pour Grzegorzczuk, logicien polonais qui montra que S4Grz capture, à la manière de S4, la logique intuitionniste.

la vérité (p), ce qui la fait appartenir à la fois à la réalité intelligible — elle participe au monde et/ou à l'être —, et à la réalité divine, ce qui lui fait perdre son nom, mais non son être, et cela rend compte de nombreux aspect de l'expérience rapportée par les mystiques — et pas seulement les mystiques rationalistes grecques.

La distinction entre âme (sujet connaissant) et la description à la troisième personne de son “corps intelligible” (la prouvabilité formelle) rend à la fois directement compte de la principale erreur commise par les anti-mécanistes quand il utilise le théorème de Gödel, et rend compte de l'abîme entre le formel et l'intuitif que Jean Ladrière extrait de l'incomplétude Gödelienne. En effet, si je suis une machine (correcte) il existe un prédicat arithmétique, ou de façon équivalente une machine, qui me représente. On a dès lors: je sais p , Cp , ssi la machine prouve p , ssi Bp , ssi je prouve p , pour p limité aux propositions de l'arithmétique (pour simplifier l'exposition). Lucas et Penrose dérivent alors une contradiction de $Cp \rightarrow p, Bp \rightarrow p, Bp \leftrightarrow Cp$, à partir de la diagonale $p \leftrightarrow \neg Bp$. Mais G^* montre directement, avec la définition théététique, ($Cp \leftrightarrow Bp \& p$), qu'il n'y a pas de contradiction: G^* prouve $Cp \rightarrow p$, G^* prouve $Bp \rightarrow p$, et G^* prouve $Bp \leftrightarrow Cp$. La contradiction ne peut apparaître que si la machine (moi, à la troisième personne) prouve $Bp \leftrightarrow Cp$, ce que le mécaniste ne prétend pas, et ne peut pas prétendre, car G^* , complet pour la vérité sur la machine (à ce niveau propositionnel) ne prouve ni $C(Bp \leftrightarrow Cp)$, ni $B(Bp \leftrightarrow Cp)$. Ceci montre que les arguments Gödéliens anti-mécanistes de Lucas et de Penrose ne prouvent pas que “je suis une machine”, ($Bp \leftrightarrow Cp$, pour un certain B arithmétique) conduit à une contradiction, il montre seulement que “je sais que je suis une certaine machine c'est-à-dire, $C(Bp \leftrightarrow Cp)$ pour un certain B arithmétique, conduit à une contradiction. La morale est que si je suis une machine (et si je suis correct ou simplement consistant), alors je ne peux pas savoir quelle machine je suis. En résumé l'ensemble des propositions $\{Bp \rightarrow p, Cp \rightarrow p, Cp \leftrightarrow Bp\}$ n'est pas contradictoire, avec un p diagonal: $p \leftrightarrow \neg Bp$. C'est l'ensemble $\{Bp \rightarrow p, Cp \rightarrow p, C(Cp \leftrightarrow Bp)\}$ qui pose problème. Le fossé entre la prouvabilité formelle et la prouvabilité intuitive ou la connaissance vaut pour l'homme comme pour la machine.

Ceci met directement en évidence l'invalidité de la déduction de Lucas et de Penrose⁴. La correction imposée par la logique de l'autoréférence “vraie”, l'intellect divin, ici, extrait aisément la partie valide du raisonnement, et illustre alors l'abîme séparant la preuve formelle, générée par la machine, et le point de vue de la machine elle-même, donnée par la définition de Théétète. Elle s'applique tout autant à la machine qu'à l'homme. Du point

⁴Notons que Penrose corrige cette erreur dans son deuxième volume, mais ne tient pas vraiment compte de la correction [31].

de vue de la connaissance de la machine, elle ne peut pas croire (correctement) qu'elle est une machine particulière. Elle peut encore parier sur un niveau de description d'elle-même où elle serait une machine, mais cela lui demandera un acte de foi ou une croyance religieuse dans une forme de réincarnation. En fait cela lui demandera une démarche proprement théologique. Ladrière a raison: le théorème de Gödel et les faits de limitation des formalismes signent bien l'inadéquation du réductionnisme de l'humain, mais ils signent aussi, dans le cadre de l'hypothèse du mécanisme, la faillite de la conception réductionniste du concept de machine, ou même de la finitude en général. En particulier ceci montre que si le Mécanisme peut être décrit de façon quasi-opérationnelle par l'acquiescement pour un cerveau digital artificiel, il garantit une éthique qui peut être décrite par le droit de refuser une telle greffe digitale. Si je suis une machine, alors la proposition "je suis une machine" n'est pas complètement de l'ordre de la science: mais plutôt de l'ordre du choix personnel et privé.

6. Les Deux Matières

Nous venons de voir que si nous sommes des machines, nous ne pouvons pas savoir avec certitude quelle machine nous sommes. Ceci entraîne que nous ne pouvons pas savoir non plus quelles machines universelles nous supportent, ou quels calculs accèdent à nos états computationnels. La situation est plus étrange encore: nous pouvons prédire que si nous nous observons nous-même à une résolution plus fine que celle de notre niveau de substitution fonctionnelle digital, alors nous devons découvrir la trace d'une sorte de compétition entre une infinité de machines universelles — et tout autant d'histoires computationnelles. La thèse de Church garantit la solidité de la notion de l'ensemble de tous les calculs possibles, et même de son effectivité. Un déployeur universel est un programme qui génère et exécute *tous* les programmes [22]. Son exécution procède petit à petit en zig-zaguant sur les segments initiaux des calculs⁵. Automatiquement ce déployeur particulier va générer, d'une façon hyper-redondante, l'activité de tous les programmes possibles décrits dans tous les langages de programmation possibles. Ceci découle assez aisément de la thèse de Church. L'indéterminisme mécaniste de la première personne aura l'activité intégrale d'un tel déployeur comme domaine, qu'il soit interprété dans une réalité physique ou non. En

⁵ Un simple programme en pseudo-code peut être donné, avec ϕ_i représentant une énumération des fonctions partielles récursives [36], par:

```
POUR TOUT  $i, j, k$  entiers positifs
- calculer les  $k$  premières étapes de  $\phi_i(j)$ 
FIN
```

effet, le déployeur est intégré naturellement dans les conséquences des lois d'addition et de multiplication de l'arithmétique élémentaire. Cela découle de l'arithmétisation Gödelienne de la méta-arithmétique, et de l'incapacité pour une machine digitale de distinguer une réalité physique d'une réalité virtuelle ou arithmétique [21, 28]. Ceci entraîne qu'au niveau des vérités ontologiques primaires, le mécanisme permet de se limiter à la vérité Σ_1 -arithmétique. La Σ_1 -complétude est l'équivalent arithmétique de l'universalité, au sens de la thèse de Church, et les propositions Σ_1 constituent les propositions atomiques de base (au sens des logiciens) de la physique des machines digitales — c'est-à-dire celles sur lesquelles portent l'indéterminisme de la première personne (du singulier, et du pluriel puisque le déployeur universel exécute arithmétiquement aussi toutes les interactions possibles entre programmes). La physique de la machine fait donc partie intégrante de sa théologie, et nous pouvons, et même devons, extraire les lois physiques, c'est-à-dire les lois sur l'observable, à partir de la statistique relative des calculs: relative à nos états computationnels. La physique, ou l'observable de la machine, est donnée par une mesure sur l'incertitude, relative à l'état actuel de la machine, sur l'ensemble des calculs passant par son état actuel. Le caractère de cet indexical est définissable par les logiques de l'autoréférence. Il convient dès lors de limiter l'interprétation arithmétique des variables propositionnelles aux propositions arithmétiques Σ_1 . Celle-ci, chez les machines Löbiennes sont caractérisée par leur “complétude”: $p \rightarrow Bp$. Visser [41] a démontré de fait que la logique de l'autoréférence est alors axiomatisée complètement par la logique $G + p \rightarrow Bp$, que nous appellerons G1. Pour les variantes intensionnelles comme S4Grz, j'ajoute un 1 symbolique pour signifier qu'il s'agit d'une variante de G1, mais en générale, ces logiques sont caractérisées similairement par l'ajout de la formule “1”, $(p \rightarrow Bp)$, correspondante.

On a alors ce résultat que pour les variantes de G donnée par $Cp = Bp \& p$, mais aussi pour les variantes suivante $Cp = Bp \& Dt$ (ou le rajout de la consistance permet l'arithmétisation de l'indéterminisme à la première personne) et $Cp = Bp \& Dt \& p$, où l'on réitère l'idée de Théétète sur le calcul des probabilités pour rendre sensible (physique) l'intelligible (la physique), donnent des logiques épistémiques vérifiant à la fois $Cp \rightarrow p$ et $p \rightarrow BDp$, qui correspondent, à la perte de nécessité près, à des logiques quantiques [13], et donnent ainsi une interprétation arithmétique de variantes de la logique quantique.

Nous obtenons ainsi en tout 8 “hypostases arithmétiques”: Les trois hypostases primaires: p (la vérité arithmétique), Bp (l'intelligibilité), $Bp \& p$ (la connaissabilité) et les deux matières $Bp \& Dt$ (la matière intelligible) et $Bp \& Dt \& p$ (la matière sensible), avec l'interprétation arithmétique de p restreintes aux propositions Σ_1 . Trois hypostases primaires ajoutées à

deux "hypostases *secondaires*" donnent en tout huit hypostases. Cela semble miraculeux, mais c'est que l'incomplétude distingue la part prouvable de la machine de la part *inprouvable mais vraie*, et sépare trois parmi les cinq hypostases en deux. L'*intelligible* se sépare en deux, correspondant aux logiques G et G* par le théorème de Solovay, bien qu'ici il s'agit de G1 et G1*. La connaissabilité (l'Âme du Monde), on a vu ne splitte pas: S4Grz1 = S4Grz1*, mais les deux matières (les logiques Z1 et X1) splittent toute deux, et donnent deux logiques supplémentaires Z1* et X1*. X1* correspond à la logique des propositions sensibles et non prouvables et on peut argumenter qu'elles ébauchent une logique des quanta *et* des qualia de la machine Löbienne. Au niveau propositionnel, toutes ces logiques sont décidables, et les parts vraies non prouvables sont inférables ou interrogeables par la machine elle-même [39].

Les logiques du "calcul des probabilités" sur les extensions consistantes des états computationnels de la machine correspondent, dans l'interprétation arithmétique, au niveau du vrai (G1*), au "calcul barbare" ou "spurious reasoning", auquel Platon fait allusion dans le *Timée*, ainsi que Plotin dans son étude des deux matières: la matière sensible et la matière intelligible [33]. Le rôle du *Dt*, et des expressions de la forme $\neg B\#$, fait de la matière une altérité, ou privation, au sens de Plotin, et rejoint l'idée commune selon laquelle la nature devient *l'éternelle négation du logos* pour reprendre, dans un contexte (néo)platonicien, l'expression d'André Léonard [19].

Il n'y a pas lieu ici d'entrer dans les détails techniques. On a vu que la réfutation Gödélienne du mécanisme ne peut pas fonctionner car elle ignore que pour la machine, par le fait de l'incomplétude, les logiques dépendent des variations intensionnelles, comme la connaissance ($Bp \& p$). Ici on voit que les réfutations quantiques ne peuvent pas non plus fonctionner car la machine peut retrouver par elle-même sa propre logique — non booléenne — de l'observation intelligible ($Bp \& Dt$), et de l'observation sensible ($Bp \& Dt \& p$), et celle-ci vérifie les bizarreries quantiques formellement, en première analyse tout du moins, et ceci en miroitant les contraintes exigées par les expériences par la pensée. La première donne une logique S4Grz qui semble associé à la machine une notion de connaissance ou de prouvabilité intuitive, non définissable dans l'arithmétique ou dans le langage de la machine Löbienne considérée. S4Grz1, et les autres variantes intensionnelles, accompagnées de la restriction Σ_1 , donnent des logiques quantiques, qui semble structurer les observations qu'une machine peut inférer à partir de son état computationnel actuel, et lui faire inférer une réalité observable, partiellement transcendante, résultant de l'interférence statistique de l'indétermination de la machine sur ses évolutions computationnelles possibles.

On voit que l'hypothèse du mécanisme, qui est souvent utilisée par le matérialiste comme une solution en soi du problème des relations de l'âme

et du corps, permet au contraire de reformuler le problème en terme précis, avec une interprétation transparente en termes de relations ou d'ensemble structurés de relations, entre nombre naturels. La faiblesse de l'approche est que cette reformulation aboutit à des questions compliquées de logique et de théorie informatique. Rawling et Selesnick [35] sont parvenus à traiter le "nor" quantique en terme de logique quantique, et il reste à résoudre la question de savoir si une telle interprétation peut être étendue dans une des versions Löbiennes arithmétiques de la logique quantique. Von Neumann espérait trouver une logique quantique qui justifierait l'entierité du calcul des probabilité quantiques, et là aussi la question reste ouverte si S4Grz1, ou les deux nouvelles "hypostases" arithmétiques, sont capables de satisfaire cette condition. Les expériences par la pensée suggèrent que cela doit être possible, mais ils se pourraient que la théorie classique ("Théététique") de la connaissance ne soit pas encore assez fine pour une telle tâche.

7. Concordisme Platonicien

La machine Löbienne est une machine universelle, dans le sens mathématique d'Emile Post, Alan Turing, Alonzo Church, Stephen Cole Kleene capturé de façon robuste par la thèse de Church [9], qui est capable d'émettre des assertions vraies de l'arithmétique, dont notamment les formules $p \rightarrow Bp$, pour p Σ_1 -arithmétique. On suppose idéalement qu'elle ne propose aucune assertion fausse. Cela lui confère une forme d'autoréférence maximale dont la logique obéit aux logiques modales G et G* de Solovay. On peut alors l'affubler de capacités triviales d'auto-inférence inductive, au sens de Blum et Blum [4]. Elle apparaît *mystique*, car elle peut produire comme "vraies", mais non "prouvables" les propositions arithmétiques correspondant à sa propre couronne $G^* \setminus G$. De telles machines héritent et redécouvrent d'elles-mêmes la théologie Plotinienne dans sa version arithmétique, mais, à moins d'être computationaliste elle-même, sans nécessairement deviner sa source arithmétique, et sans pouvoir prétendre pouvoir démontrer que cette théologie s'applique à elles-mêmes. On peut voir là une théologie *jouet*, et on peut la faire varier en raffinant davantage la théorie classique, de Théétète, ou la théorie de la matière d'Aristote et Plotin. L'existence de ce discours autoréférentiel, à la troisième personne mais aussi à la première personne, exclut la vision réductionniste de la machine.

Dominique Lambert rejoint Ladrière dans son livre [18] "Sciences et Théologie". Il écrit: *'Néanmoins, la "re-production" et la "re-présentation" du monde s'accompagne d'une attitude de respect, de distance. La réalité produite et présentée dans le formalisme n'est pas identiquement la réalité au sens plein du terme. Celle-ci déborde largement l'activité du scientifique. Il y a donc une expérience de l'autonomie propre du Monde, de la distance*

entre l'altérité du réel et son engendrement empirico-formel. Cela s'inscrit bien dans la lignée de Ladrière, et au vu de l'analyse qui précède, s'inscrit encore davantage dans l'idée, au départ naturaliste, que le cerveau et son contenu subjectif est déjà une théorie naturelle du monde faisant de nous des hypothèses divines, qui nous force alors à l'extrême humilité, jusqu'à y compris le doute. Car la machine elle-même accède à son incommunicable et innombrable présence, si on accepte la définition classique de Théétète, qui définit l'âme de la machine par la conjonction de sa croyance avec la vérité *sur* la machine. Ainsi à première vue, l'intellect de la machine, qui obéit à la logique de l'auto-référence G , peut-il jouer le rôle de la science, alors que G^* jouerait le rôle de la théologie, avec $G^* \setminus G$, ainsi que ses variantes intentionnelles décrites plus haut, jouant le rôle de la part mystique. Cette part différencie la troisième personne, objective et douteuse, de son expérience subjective, et spirituelle, non douteuse, mais *incommunicable*, c'est-à-dire, non prouvable ou même révélable publiquement.

Mais ne risquons-nous pas de tomber dans un paradoxe? Cette théologie des machines appartient-elle à la science ou à la théologie? Ne sommes-nous pas en train de communiquer ce que la machine elle-même, idéalement correcte, suggère être totalement scientifiquement ou rationnellement incommunicable?

Il n'y a pas de paradoxe si on se rappelle que la science naît du doute, vit dans le doute, et n'aboutit qu'à plus de doutes encore. La science ne propose que des relations hypothétiques qui sont comme des lanternes jetant un peu de lumière sur l'Inconnu qui la transcende. Une théologie scientifique n'est pas une théologie certaine, justement. Elle est au contraire la part obligatoirement douteuse, qu'on ne peut pas même prendre comme axiome, mais seulement comme une sorte de méta-espoir. Il s'agit d'un espoir en notre propre finitude, en fait, et dans l'adéquation de nos représentations locales et finies avec la vérité, autrement transcendante.

Techniquement une machine Löbienne d'une certaine force, comme la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel⁶ peut étudier la théologie d'une machine Löbienne de force inférieure (comme l'arithmétique de Péano), et même démontrer son adéquation. Mais ce que la machine ZF ne peut pas faire, c'est d'emprunter cette théologie comme s'appliquant d'office à elle-même. G lui-même garantit l'inconsistance d'un tel lifting: la machine peut savoir qu'elle serait ainsi conduite à l'inadéquation de cette théologie ou à son inconsistance. En conséquence, la théologie *humaine* ne peut pas être *totalement* scientifique. Ici la machine dit quelque chose de plus générale:

⁶ Ou plutôt de sa "von Neumann-Bernays-Gödélisation", comme l'appelle mon ami Éric Vandebussche, c'est-à-dire sa présentation finie sous la forme d'un démonstrateur ou producteur d'assertions. Notons qu'ici la force d'une théorie/machine est mesurée par l'ensemble des propositions arithmétiques qu'il (elle) est capable de démontrer.

la théologie de la machine X ne peut pas être entièrement scientifique du point de vue de la machine X. Le phénomène d'incomplétude, dont on a vu qu'il est accessible à la machine elle-même, la rend humble devant ce qu'elle peut espérer croire s'appliquer à elle-même, comme l'existence des nombres naturels, ou l'existence d'une histoire computationnelle capable de l'étendre, et notamment de son incarnation dans la vérité arithmétique, ou, sur un plan davantage terrestre, l'existence d'un niveau de substitution fonctionnelle digital du Mécanisme lui-même. On voit que si le mécanisme peut conduire un humain à accepter une greffe de cerveau artificielle, l'éthique du mécanisme, rendue nécessaire sur la plan de la cohérence logique, revient à garantir le droit de s'opposer à une telle substitution et de refuser la proposition du docteur digitaliste. En fait la personne doit exiger du docteur d'admettre qu'il y a un double pari dans cette pratique: un pari sur le mécanisme — dont on a vu le caractère falsifiable, et un pari sur le niveau concret choisi pour la duplication. Aucune science ne pourra jamais assurer le succès de l'entreprise. Même la répétition de l'expérience pour un même sujet ne le dispensera pas de devoir réitérer à chaque fois un véritable acte de foi.

IRIDIA

Université Libre de Bruxelles

Belgique

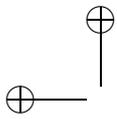
E-mail: marchal@ulb.ac.be

RÉFÉRENCES

- [1] S. Artemov. Kolmogorov's logic of problems and a provability interpretation of intuitionistic logic. In R. Parikh, editor, *Proceedings of the Third Conference on Theoretical Aspect of Reasoning about Knowledge (TARK 90)*. Morgan Kaufmann Publishers, 1990.
- [2] M. Askanas. Formalization of a semantic proof of Gödel's incompleteness theorem. *J. of Symbolic Logic*, 42(154), 1975.
- [3] P. Benacerraf. God, the Devil, and Gödel. *The monist*, 51:9–32, 1967.
- [4] L. Blum and M. Blum. Toward a Mathematical Theory of Inductive Inference. *Information and Control*, 28:125–155, 1975.
- [5] G. Boolos. *The Unprovability of Consistency*. Cambridge University Press, London, 1979.
- [6] G. Boolos. *The Logic of Provability*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [7] M. Burnyeat. *The Theaetetus of Plato*. Hackett Publishing Company, Indianapolis, Cambridge, 1990. Translation by M.J. Levett.

- [8] M. Burnyeat. Socrate et le jury: de quelques aspects paradoxaux de la distinction platonicienne entre connaissance et opinion vraie. In M. Canto-Sperber, editor, *Les paradoxes de la connaissance, essais sur le Ménon de Platon*, pages 237–251. Editions Odile Jacob, Paris, 1991.
- [9] M. Davis, editor. *The Undecidable*. Raven Press, Hewlett, New York, 1965.
- [10] H. Everett III. "Relative state" formulation of quantum mechanics. *Review of Modern Physics*, 9(3):454–462, 1957. Also in DeWitt and Graham 1973.
- [11] T. Franzèn. *Gödel's Theorem, An Incomplete Guide to its Use and Abuse*. A.K. Peters, Natick, Massachusetts, 2005.
- [12] K. Gödel. Über formal unentscheidbare sätze der principia mathematica und verwandter systeme i. *Monatsh., Math. Phys.*, 38:173–198, 1931. Traduction américaine dans Davis 1965, page 5+.
- [13] R.I. Goldblatt. Semantic Analysis of Orthologic. *Journal of Philosophical Logic*, 3:19–35, 1974. Aussi dans Goldblatt 1993, page 81–97.
- [14] J. Hirschberger. *Kleine Philosophiegeschichte*. Verlag Herder, Freiburg-Basel-Wien, 1987.
- [15] D. Kaplan and R. Montague. A Paradox Regained. *Journal of Formal Logic*, 1:79–90, 1960.
- [16] S.C. Kleene. *Introduction to Metamathematics*. North-Holland, Amsterdam, 1952.
- [17] J. Ladrière. *Les Limitations Internes des Formalismes*. Nauwelaerts/Gauthier-Villars, Paris/Louvain, 1957.
- [18] D. Lambert. *Sciences et Théologie*. Presse Universitaire de Namur, Namur, 1999.
- [19] A. Léonard. *Foi et Philosophie, Guide pour un Discernement Chrétien*. Culture et Vérité, Chrétien Aujourd'hui, Namur, 1991.
- [20] J.R. Lucas. Minds, Machines and Gödel. *Philosophy*, 36:112–127, 1961.
- [21] B. Marchal. Informatique Théorique et Philosophie de l'Esprit. In *Actes du 3ème colloque international de l'ARC*, pages 193–227, Toulouse, 1988.
- [22] B. Marchal. Mechanism and Personal Identity. In M. De Glas and D. Gabbay, editors, *Proceedings of WOCFAI 91*, pages 335–345, Paris, 1991. Angkor.
- [23] B. Marchal. Amoeba, Planaria, and Dreaming Machines. In P. Bourguine and F.J. Varela, editors, *Artificial Life, towards a practice of autonomous systems, ECAL 91*, pages 429–440. MIT Press, 1992.
- [24] B. Marchal. Conscience et Mécanisme. Technical Report TR/IRIDIA/94, Brussels University, 1994.

- [25] B. Marchal. *Calculabilité, Physique et Cognition*. PhD thesis, Université de Lille, Département d'informatique, Lille, France, 1998. Editions Universitaires Européennes, 2010.
- [26] B. Marchal. The Origin of Physical Laws and Sensations. In *4th International System Administration and Network Engineering Conference, SANE 2004*, Amsterdam, 2004.
- [27] B. Marchal. A Purely Arithmetical, yet Empirically Falsifiable, Interpretation of Plotinus' Theory of Matter. In Barry Cooper S., Löwe B., Kent T.F. and Sorbi A., editors, *Computation and Logic in the Real World, Third Conference on Computability in Europe June 18-23*, pages 263–273. Università degli studi di Sienna, Dipartimento di Roberto Magari, 2007. Local Proceedings, 2007.
- [28] T. Maudlin. Computation and Consciousness. *The Journal of Philosophy*, pages 407–432, 1989.
- [29] D.J. O'Meara. *Plotinus. An Introduction to the Enneads*. Clarendon Press, Oxford, 1992.
- [30] R. Penrose. *The Emperor's New Mind*. Oxford University Press, Oxford, 1989.
- [31] R. Penrose. Précis of The Emperor's New Mind: concerning computers, minds and the laws of physics. *Behavioral and Brain Sciences*, 13(4):643–705, 1990.
- [32] Platon. *Théétète ou de la science*, pages 83–192. Œuvre de la pléiade. Editions Gallimard, Paris, 1950.
- [33] Plotin. *Ennéades II*. Les Belles Lettres, Paris, 1924. Traduction de Emile Bréhier.
- [34] Plotin. *Ennéades IV*. Les Belles Lettres, Paris, 1927. Traduction de Emile Bréhier.
- [35] J.P. Rawling and S.A. Selesnick. Orthologic and Quantum Logic: Models and Computational Elements. *Journal of the ACM*, 47(4):721–751, 2000.
- [36] H. Rogers. Gödel's Numbering of the Partial Recursive Functions. *Journal of Symbolic Logic*, 23:331–341, 1958.
- [37] R.M. Solovay. Provability Interpretation of Modal Logic. *Israel Journal of Mathematics*, 25:287–304, 1976.
- [38] J. Trouillard. *L'Un et l'Âme selon Proclus*. Les Belles Lettres, Paris, 1972.
- [39] E. Vandenbussche. Axiomatisation des logiques Z, Z*, Z1, Z1*, Document manuscrit non publié, 2005.
<http://iridia.ulb.ac.be/marchal/Vandenbussche/AxiomatisationZ.html>
- [40] W.P. van Stigt. *Brouwer's Intuitionism*, volume 2 of *Studies in the history and philosophy of Mathematics*. North Holland, Amsterdam, 1990.



- [41] A. Visser. *Aspects of Diagonalization and Provability*. PhD thesis, University of Utrecht, Department of Philosophy, The Nederland, 1985.
- [42] J.C. Webb. *Mechanism, Mentalism and Metamathematics: An essay on Finitism*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1980.

