

## NATURE ET LOGIQUE DE G. GENTZEN À J.-Y. GIRARD

JEAN-BAPTISTE JOINET

### RÉSUMÉ

La conception de la logique de J.-Y. Girard s'enracine dans la critique de la naturalité logique opérée par G. Gentzen dans les années 1930. Récemment, Girard a radicalisé cette critique et proposé une entreprise de refondation de la logique comme produit d'une théorie générale de l'interaction. La présente étude vise à montrer que cette entreprise va dans le sens d'une réunification de l'idée de logique naturelle et de celle de logique de la nature, via la notion de calcul.

*Keywords:* Démonstration, déduction naturelle, G. Gentzen, J.-Y. Girard.

J.-Y. Girard's conception of logic originates in the critique of logical naturalness made by G. Gentzen around 1930. Recently, Girard radicalized this critique and proposed a program for new foundations for logic, as a product of a general theory of interaction. The present paper is an attempt to show that this program tends to reunify the idea of natural logic and the idea of a logic of nature, via the notion of computation.

*Keywords:* Proof, natural deduction, G. Gentzen, J.-Y. Girard.

Pour qualifier la rupture intervenue dans les années 1970 en Théorie de la démonstration, rupture dont les effets se prolongent encore aujourd'hui en logique au delà de cette branche particulière de la discipline, l'image d'une révolution copernicienne (Girard 2007, p. 368) ne semble pas excessive. En quelques dizaines d'années, l'ancien paradigme logique a proprement éclaté : la théorie de la démonstration s'est engagée dans une redéfinition de son projet autour d'un nouvel objet – cf. Joinet (2009 ; 2014) et Girard (2007, notamment section 7.1) – et se dégage progressivement du système de préjugés, invisible à force d'être familier, qui bornait son questionnement<sup>1</sup>.

Si les temps et les lieux de cette révolution sont certainement multiples – l'activité scientifique est avant tout affaire de communautés –, le rôle des idées délétores et salutaires de Jean-Yves Girard en tant qu'accélérateur de cette recomposition apparaît distinctement, avec le recul, comme déterminant.

<sup>1</sup> Cf. chez Girard, le thème récurrent du « préjugé essentialiste » (Girard 2007, p. 408), du « filtre idéologique essentialiste » hérité de la tradition logique (Girard 2007, p. 365). Sur ce point encore, voir en particulier Girard (2007, p. 394-395).

Dans le présent article, plutôt que de retracer la petite histoire convenue de ces évolutions le long d'un fil des événements scientifiques, à la linéarité largement imaginaire, où la fameuse découverte, autour des années 1960, de la « correspondance de Curry-Howard » tiendrait lieu d'origine (Howard 1980, Cardone & Hindley 2009), je m'attacherai à montrer d'une part comment, sur une échelle de temps plus longue, l'attitude épistémologique et la conception de la logique de Girard s'enracinent dans la critique de la naturalité logique opérée par Gerhard Gentzen<sup>2</sup> dans ses travaux logiques, d'autre part comment, radicalisant cette critique, Girard en vient, sur un mode non métaphorique, à réunifier par la médiation de la notion d'interaction calculatoire, l'idée de logique naturelle et celle de logique de la nature.

## 1. Infini dynamique et constructivité procédurale

Lorsque paraît, en 1935-1936, « Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie » de G. Gentzen, le débat fondationnel provoqué par la découverte des « antinomies » dans la théorie des ensembles est à son point culminant : non seulement, parce que les positions *philosophiques* affinées au fil de cette controverse sont désormais on ne peut plus tranchées, mais surtout parce que les propositions *méthodologiques* de Hilbert sont ébranlées par la récente publication par Gödel de son fameux théorème d'incomplétude.

De ce débat fondationnel, le jeune Gentzen maîtrise à l'évidence tous les aspects – mathématiques bien sûr<sup>3</sup>, mais philosophiques également (comme le démontre le panorama très complet des débats qu'il peint en introduction et en conclusion de ce travail sur l'arithmétique).

Si dans ce moment éminemment critique d'un débat fondationnel qu'il domine pleinement, Gentzen peut continuer à se positionner en défenseur serein du *programme de Hilbert*<sup>4</sup> et même envisager pour ce programme

<sup>2</sup> G. Gentzen (1909-1945). Pour des informations biographiques plus précises, on peut consulter (Vihan 1995), qui affronte les aspects sombres de la vie de Gentzen, nommé par l'Allemagne nazie professeur d'université dans Prague occupée, où il périt sur fond de déroute des armées du Reich. Pour la présente étude, seuls les travaux mathématiques et les réflexions sur les fondements des mathématiques de Gentzen ont été pris en compte (à savoir les textes rassemblés dans Szabo (1969) et diverses traductions françaises des plus importants d'entre eux, notamment dans Largeault (1992), ainsi que la version française traduite et commentée par Feys & Ladrière (1992) des *Untersuchungen über das logische Schliessen* de Gentzen (1934; 1935).

<sup>3</sup> Doctorant, Gentzen fut dirigé par Hermann Weyl. En outre, il fut pendant cette période un grand lecteur des travaux mathématiques et logiques de ses contemporains, comme en témoigne le grand nombre de recensions qu'il a effectuées.

<sup>4</sup> Selon Jean Largeault (1972, p. 262), c'est Gentzen qui aurait introduit le mot « programme » pour désigner l'ensemble des idées de Hilbert.

un avenir<sup>5</sup>, c'est que, tout en restant conforme à l'objectif hilbertien (développer une métamathématique pour donner des preuves de non dérivabilité de contradictions), le travail qu'il publie amende substantiellement les termes du projet méthodologique hilbertien (la preuve de cohérence de 1935 réalise en effet le remplacement du finitisme *stricto sensu* (expression qui n'a de sens que rétrospectivement, puisqu'Hilbert n'est jamais précis sur ce qu'il considère comme moyens finitistes) par ce qu'on pourrait appeler un constructivisme ordinal<sup>6</sup>) et, au plan philosophique, amorce du même coup le double geste d'une réappropriation du programme de Hilbert et d'un déplacement du débat fondationnel.

Le premier de ces gestes, qu'au prix d'un anachronisme utile, on pourrait décrire comme l'internalisation procédurale de l'infini<sup>7</sup>, est l'indice manifeste de la tendance anti-essentialiste présente chez Gentzen. S'il a une conscience claire du lien étroit entre la question de la cohérence et celle de l'infini, il congédie la question du statut ontologique de l'infini «actuel» hors du champ des questions scientifiques testables à travers les outils de sa discipline: «Si et en quelle mesure quelque chose de “réel” correspond au sens actualiste d'une proposition transfinie, en dehors de ce qu'exprime son sens finitiste restreint, voilà une question à quoi la démonstration de consistance n'a pas de réponse à offrir»<sup>8</sup>. Processuel dans l'économie des jeux de langage mathématiques et producteur concret d'effets pratiques finitistes, l'infini n'a plus besoin d'un correspondant référentiel dans un hypothétique réel qui fonderait sa signification.

Cette grande prudence de Gentzen quant à la portée ontologique de son travail relativement à l'infini ensembliste, ne doit pas être comprise comme un rejet pur et simple de l'infini. Il s'agit plutôt du remplacement des approches «statiques» de l'infini dont la notion de cardinal est emblématique,

<sup>5</sup> Cf. Gentzen (1935a) traduit par Largeault (1992, p. 354-355). Malgré l'échec littéral du programme de Hilbert, Gentzen continuera durablement à assumer et revendiquer ce rôle perpétuateur du programme, cf. la note ajoutée par Dag Prawitz dans la nouvelle édition 2006 (Prawitz 2006) de son *Natural deduction. A proof-theoretical study* de 1965. Prawitz y cite «une lettre de Gentzen» citée par Mentzler-Troot (2001, p. 35). D'ailleurs, l'essai de 1937 de Jean Cavaillès (Cavaillès 1938), s'achève symptomatiquement par une analyse de l'approche de Gentzen, dont l'enjeu crucial pour *un futur malgré tout* du programme hilbertien est clairement aperçu.

<sup>6</sup> Mais comme le dit (Kreisel 1971, p. 240) dans son compte-rendu des *Gentzen Collected papers*, à propos de Gentzen: «l'analyse de la signification d'une démonstration de consistance peut être plus difficile que cette démonstration elle-même» – cité par Largeault (1972, p. 218).

<sup>7</sup> Le terme procédural est introduit par J.-Y. Girard dans Girard (2007a). Le terme «procédural» n'a bien sûr pas le sens péjoratif de «bureaucratique»: il se comprend en opposition à «essentialiste».

<sup>8</sup> Gentzen (1935a), cf. Largeault (1992, p. 357). Voir aussi Cavaillès (1938, p. 170). Dans le passage cité, Gentzen renvoie en quelque sorte l'essentialisme à son statut d'idéologie scientifique au sens où G. Canghilhem entendait ces mots: l'utilisation des résultats d'une science comme support ou renfort d'un système de préjugés.

par un infini dynamique. Les passages de ses démonstrations de cohérence dans lesquelles il recherche, dans les preuves, les sources de l'accroissement de complexité des processus de normalisation, autrement dit d'*analytisation*<sup>9</sup> de ces preuves, sont à cet égard emblématiques. On peut, à bon droit, mettre ces observations de Gentzen en résonance avec les remarques ultérieures de Girard (sur les « règles structurelles » génératrices d'infini) qui conduiront à la logique linéaire, où les sources procédurales de l'infini dynamique sont en quelque sorte incarnées dans le langage logique lui-même via ces seules « traces formelles de l'infini en logique [que sont] les exponentielles » (Girard 2007, p. 397).

Si l'on trouvait déjà chez Hilbert un regard non essentialiste sur l'infini (l'infini comme élément idéal, comme manière de parler, comme fiction utile mais éliminable sous réserve de limiter son être à ses effets finitistes), il convient d'observer qu'on est avec Gentzen un cran au dessus du slogan hilbertien. La légitimisation des règles de démonstration et des usages de l'infini (gagée sur la non-contradiction, comme dans la perspective sémantique hilbertienne : « le sens, c'est la cohérence ») se double ici d'une théorie beaucoup plus raffinée de la signification. Celle-ci est abordée comme processus concret, procédural, d'évaluation, sous une forme qui, comme le souligne Girard (2006, p. 10) ou Girard (2007, p. 290-291), constitue le premier exemple d'interprétation « interactive » de la logique – voir en particulier le § 9 du titre III de Gentzen (1935a).

Le second geste décisif de ce premier Gentzen peut être décrit comme une objectivation (une dé-subjectivisation) achevée du constructif. Centrale chez Brouwer (qui revendiquera sur ce point d'être rattaché à la tradition kantienne et sa conception de l'activité mathématique comme construction de concepts), la notion de « construction », désigne chez ce dernier un processus mental<sup>10</sup>, et la thèse philosophique de l'incommensurabilité du langage et de la pensée, cruciale dans la critique du « formalisme » hilbertien par Brouwer, s'appuie en particulier sur l'idée que le signe n'est pas générateur, sans considération donc pour l'idée d'une dimension processuelle, génératrice d'effets, attachée aux symboles via leurs règles de manipulation. Mais la mise au jour par Gentzen des effets dynamiques du langage, policés dans les preuves par les règles de la logique, vient précisément saper l'argument brouwerien et signe la migration des « constructions » de l'espace de la subjectivité vers l'espace concret des processus dont le langage envisagé comme producteur d'effets est le siège.

<sup>9</sup> « Analytisation » désigne l'action de rendre (une preuve) analytique (à bien distinguer, donc, d'« analyse » : d'où le néologisme).

<sup>10</sup> La dimension subjective, *représentationnelle* de la notion de « construction » est centrale chez Brouwer dès son « Qu'on ne peut pas se fier aux principes logiques » (Brouwer 1908, Largeault 1992, p. 20).

## 2. Le premier Gentzen ou la naturalité comme levier contre les contempteurs de l'artificialité logique

Hilbert lui-même présentait son « programme » comme un projet méthodologique visant à régler par des moyens mathématiques un problème philosophique<sup>11</sup>. Par suite, on a souvent interprété les résultats d'incomplétude comme un argument mathématique en faveur tantôt d'un réalisme conceptuel mathématique, tantôt d'un subjectivisme mathématique (irréductibilité de la rationalité au langage). Les analyses qui précèdent montrent pourtant que, s'il ne sauve pas le programme de Hilbert de son échec littéral, le réinvestissement par le premier Gentzen du projet hilbertien préserve les deux postures philosophiques hilbertiennes – son anti-essentialisme et son anti-subjectivisme<sup>12</sup> – en leur donnant l'assise mathématique adéquate. Méthodologiquement parlant, le point de vue s'est toutefois considérablement décalé : simple *métamathématique de la prouvabilité* dans le projet hilbertien, la théorie de la démonstration devient dans les mains de Gentzen une *mathématique des preuves*.

Quoique accomplies en liaison avec les objectifs hilbertiens et tendues vers eux, les recherches de Gentzen sur la représentation des *preuves*, sur leur statut, leurs transformations et leurs états (par opposition donc, à une attention exclusive ou principale aux questions de *prouvabilité*) ont ainsi débouché sur la constitution d'un nouveau domaine d'objets, dont l'investigation mathématique a fini par dépasser en importance le projet métamathématique initial.

Le fait que diverses tentatives d'élaboration de systèmes de « déduction (d'une conclusion) sous hypothèses » aient été proposées à peu près simultanément (et de manière apparemment indépendante) au début des années trente, voire dès le milieu des années vingt<sup>13</sup>, mérite certainement d'être

<sup>11</sup> « Sur le plan philosophique, l'importance de notre problème de la cohérence des axiomes est reconnue ; cependant je ne trouve nulle part dans toute cette littérature le moindre pas vers une solution au sens mathématique du mot », Hilbert (1922), traduction Largeault (1992, p. 116).

<sup>12</sup> La filiation kantienne revendiquée par Hilbert, que ce soit implicitement lorsqu'il place une citation de la *Critique de la raison pure* en exergue de ses *Grundlagen der Geometrie* (Hilbert 1899) ou explicitement quand, en 1926, dans *Sur l'infini* Hilbert (1925) traduit par Largeault (1972, p. 22), il clame son « accord avec les philosophes, spécialement avec Kant », semble assez rhétorique puisqu'il s'agit de promouvoir les signes comme « objets concrets extra-logiques [...] donnés dans la perception, [et dont] le caractère distinct, la succession, la juxtaposition se présentent à l'intuition [...] », ce qui revient somme toute à convoquer Kant sur un terrain particulièrement peu kantien.

<sup>13</sup> Cf. la « méthode des suppositions » de Stanislaw Jaśkowski (1934), cf. McCall (1967, p. 232-258), en écho au programme lancé en 1926 par Jan Łukasiewicz visant l'élaboration de systèmes logiques plus proches qu'ils ne l'étaient alors, des pratiques démonstratives effectives des mathématiciens (systèmes de « logique suppositionnelle » comme on disait, semble-t-il, à l'époque) rendant compte en particulier du maniement des hypothèses. Selon

mis en regard des critiques alors émergentes qui furent opposées aux conceptions formalistes, critiques formulées notamment par le courant intuitionniste congédiant les systèmes de déduction comme autant de « formalismes vides », autant de jeux insignifiants sur des symboles dénués de toute signification.

Ce reproche, à dire vrai, était particulièrement facile à adresser aux systèmes formels alors prédominants (de type hilbertien) où la plus grande partie des règles sont des règles 0-aires (closes) où les divers composants du langage logique sont manipulés simultanément (par des axiomes holistiques, pourrait-on dire), au prix donc d'une intrication – sans raison apparente – de leur signification respective, et où dériver une simple identité est déjà tout un programme.

En définitive, l'élaboration par Gentzen des systèmes de *Déduction naturelle* et la priorité explicitement accordée, lors de cette première phase de ses investigations, à l'objectif de *naturalité* semble donc essentiellement correspondre au besoin de désamorcer les critiques venues de l'intuitionnisme.

En conviant « le déducteur naturel », le mathématicien, sur la scène de la théorie de la démonstration (non pas certes, comme sujet psychologique, mais comme acteur engagé dans des pratiques démonstratives « intuitives » parce que reconnaissables et familières), Gentzen vise donc à libérer la formalisation des accusations d'artificialité lancées par le courant intuitionniste notamment, et donc à compléter la fiabilité hilbertienne fondée sur l'unique exigence de cohérence par une fiabilité fondée sur la naturalité, sur l'imitation du « raisonnement naturel ».

A l'opposé des systèmes « à la Hilbert » tournés vers la question de la prouvabilité, l'élaboration de la *Déduction naturelle* résulte ainsi d'une clarification du sens de chaque connecteur logique par l'examen attentif des pratiques « naturelles » (au sens ici de pratiques historiques effectives) du mathématicien, une sorte de « zoom avant » étant pratiqué sur chaque type d'usage des connecteurs logiques dans le texte mathématique non formalisé (quoique sans doute légèrement idéalisé) comme étape de construction d'une preuve.

### 3. Le second Gentzen ou la critique de la naturalité logique

Quoiqu'il en soit, compte tenu de l'importance accordée par Gentzen au thème naturaliste dans ses premiers travaux consacrés à la « *Déduction naturelle* » et compte tenu du rôle que joue cette orientation dans le

une Petite Encyclopédie polonaise de Logique, dirigée par Kotarbiński, Marciszewski & Czarnota (1970), les premières ébauches de formalisation de « preuves suppositionnelles » dans le contexte polonais remonteraient à 1927, date du premier Congrès polonais de mathématiques (1929, date de publication des actes). Concernant l'émergence de la *Déduction naturelle*, voir aussi Mangione & Bozzi (1993, note 20, p. 612).

dialogue avec l'anti-formalisme, l'ultérieur abandon volontaire par l'inventeur de la Déduction naturelle de cette exigence de naturalité, à l'occasion de l'élaboration du second type de systèmes formels de déduction qu'on lui doit (le « Calcul des séquents »), signale une rupture.

Au plan épistémologique, celui des critères de la pertinence de l'enquête scientifique, son attitude bascule alors vers une sorte d'esthétisme mathématique où « symétrie », « simplicité », « élégance »<sup>14</sup> – prennent le pas sur la naturalité : « Il faut reconnaître qu'en général notre nouveau concept de séquent s'écarte déjà légèrement de ce qui est « naturel », écrit Gentzen, et que son introduction se justifie en premier lieu par les grands avantages formels qu'assure la représentation des formes d'inférence qu'on va indiquer » (Gentzen 1938, Largeault 1992, p. 363). Quand la naturalité, critère de sens fondé sur une pratique, hérite des contingences de cette pratique<sup>15</sup> et de ses imperfections mathématiques<sup>16</sup>, elle devient « gênante ».

Mais « les grandes contributions des mathématiques à l'avancement de la connaissance de la nature reposent précisément sur la méthode qui consiste à idéaliser le donné pour en simplifier l'étude » Gentzen (1938a), traduction Largeault (1992, p. 412), et cette critique de la naturalité déductive débouche alors sur le dévoilement d'une sorte de seconde nature, mieux structurée (on pense à l'architecture du Calcul des séquents, avec son remarquable regroupement conceptuel des règles en trois groupes : le groupe identité, le groupe logique, le groupe structurel), sur laquelle Gentzen, comme « enchanté », pose le regard qu'aurait l'intrus dans la caverne d'Ali Baba : « Il y a une symétrie complète entre  $\wedge$  et  $\vee$  et entre  $\forall$  et  $\exists$ . Tous les signes d'opérateurs sont profondément égaux en droit dans ce système ; aucun d'entre eux n'a la précellence sur les autres. Avant

<sup>14</sup> Toutes expressions utilisées par Gentzen (1938), notamment p. 367 de la traduction Largeault (1992). Gentzen reprend ici un précepte méthodologique typiquement hilbertien (l'abstraction comme outil de régulation), mais appliqué ici à ... la méta-mathématique elle-même. Comme on le verra plus loin, ce quête quasi esthétique d'une naturalité mathématique est partagé par Girard chez qui il confine au principe méthodologique (elle est à la fois critère pour diriger l'enquête et indice de son succès) et prend parfois le sens revendiqué d'un dialogue avec la nature (voir plus loin, p. 11).

<sup>15</sup> De même que nos textes, qu'ils soient mathématiques ou littéraires d'ailleurs, les preuves en Déduction naturelle progressent toujours dans une même direction, « vers le bas », des hypothèses vers le but poursuivi : la conclusion. A contrario, le Calcul des séquents introduit la possibilité, peu intuitive car éloignée de la pratique rédactionnelle, d'une croissance du texte du côté des hypothèses, « vers le haut », ce qui dans la notation concrète du Calcul des séquents, revient en fait à construire (introduire des connecteurs) ou agir (manipuler structurellement des formules) « à gauche » du signe de déduction.

<sup>16</sup> « [...] la situation spéciale de la négation [...] dans le calcul naturel constitue une exception gênante [...] », Gentzen (1938), traduction Largeault (1992, p. 367). Ce propos de Gentzen fait écho aux difficultés qu'il a rencontrées dans le cadre de la Déduction naturelle, pour généraliser au cas classique (en présence donc du raisonnement par l'absurde), sa preuve de normalisation des preuves intuitionnistes.

toute chose, la situation spéciale de la négation [...] disparaît comme par enchantement», Gentzen (1938), traduction Largeault (1992, p. 367)<sup>17</sup>.

Cette revendication explicite d'une suspension de l'imitation de «la part de nature» imputée au raisonnement humain, au profit d'une artificialité féconde et «mathématiquement plus naturelle», est sans enjeux directs du point de vue de la «fiabilité» (puisque *Calcul des séquents* et *Déduction naturelle*, par exemple classiques, sont équivalents du point de vue de la prouvabilité, et que l'un et l'autre sont justiciables de preuves de cohérence analogues du point de vue des moyens démonstratifs requis – autrement dit : puisque le niveau de «fiabilité» de la *Déduction naturelle* et celui du *Calcul des séquents* coïncident).

Pour autant, loin de constituer une simple «posture» esthétique, cet oubli du lien avec «le raisonnement naturel» montre que cette défense de la fiabilité à laquelle la naturalité désormais délaissée contribuait, n'est d'une certaine façon plus du tout prioritaire pour Gentzen – c'est d'ailleurs ce qu'il dira en passant, d'une incise laconique et déroutante, dans son panorama «État présent des recherches sur les fondements des mathématiques» de 1938 : «on n'a pas toujours à se soucier de la sûreté» (Gentzen 1938a, Largeault 1992, p. 413).

En effet, l'analyse des preuves du «calcul naturel» ayant mis au premier plan d'une part la *dynamique des preuves* comme processus concret, d'autre part l'idée qu'une preuve, au cours de ces transformations, est dans un *état* progressivement plus analytique, c'est désormais en regard de cette dynamique et de la notion d'analyticité que les règles font sens ; c'est eu égard à la socialité processuelle des règles que leurs propriétés doivent être envisagées ; et c'est en définitive dans cette socialité que se dévoile leur nature.

Ces nouveaux enjeux se comprennent mieux à partir de la distinction, introduite par Gentzen dans la définition de son *Calcul des séquents*, entre deux types d'opérations sur les preuves, de statuts radicalement hétérogènes.

Le premier type d'opération est essentiellement celui de la *construction des énoncés* (et de leur *manipulation structurelle*) par des règles dans les preuves, un type de construction par nature analytique puisqu'il part du simple pour bâtir du complexe, analyticité toutefois brouillée en *Déduction* pourtant *naturelle* par la présence, aux côtés des règles de construction («introductions»), de règles de destruction («éliminations»). Si l'on prend seulement en compte ce premier type de règles, alors le passage de la *Déduction naturelle* au *Calcul des séquents* «revient à se libérer de la succession naturelle des propositions à l'intérieur d'une démonstration [...],

<sup>17</sup> Dans la préface de la réédition de son *Natural deduction. A proof-theoretical study* (Prawitz 2006), Dag Prawitz estime que c'est précisément le problème rencontré par Gentzen dans sa preuve de normalisation en présence de la règle d'élimination de la double négation qui a motivé l'élaboration du *Calcul des séquents*.

pour instaurer à la place un ordre artificiel [...], celui de la croissance de la complexité des énoncés.»(Gentzen 1938, Largeault 1992, p. 367). Notons en passant que la visée d'une propriété essentielle – ici l'analyticité et sa clarification – est ce qui justifie, aux yeux de Gentzen, l'altération de la naturalité des systèmes de preuves, autrement dit la préférence donnée à l'artificialité.

Quoique semblant littéralement être une règle comme une autre, parmi les autres (au sens où elle permet, comme toute autre règle, de bâtir de nouvelles preuves à partir de preuves déjà formées), le second type d'opération de construction de preuves introduite par Gentzen sous le nom de règle de *coupure* (*Schnitt*) a un statut conceptuellement différent. Étant la seule règle mettant en défaut l'analyticité, la coupure est en réalité une opération de *composition* des preuves, qui amène à déclencher (en ce lieu focal où l'analyticité est mise en défaut) l'interaction des règles («l'élimination des coupures») et concourt par ce processus à restaurer, autant qu'il est possible, l'analyticité de l'argumentation.

Sans doute l'idée de «composition des preuves» n'a pas encore chez Gentzen la clarté conceptuelle qu'elle acquerra une fois la correspondance de Curry Howard repérée, et tout particulièrement chez Girard, dont l'ensemble des investigations en logique linéaire et plus récemment en ludique ont été invariablement accomplies sous l'œil régulateur de la composition des preuves et de l'interaction des règles.

En particulier, alors que la dynamique des preuves a, dans le travail de Gentzen, le statut d'un *outil* pour le logicien (outil cardinal certes, mais simple outil néanmoins) en vue de démonstrations de cohérence, l'œuvre logique de Girard, comme nous allons le voir, est traversée de part en part par l'idée que cette dynamique est l'*objet* même de la discipline, ou plutôt que l'interaction (dont la dynamique des preuves n'est qu'un cas particulier) est l'origine à partir de laquelle la logique doit être comprise et reconstruite, que c'est donc en elle que doit être recherché la véritable interface de la logique avec la nature.

#### 4. Nature de la logique et logique de la nature

La «naturalité» à laquelle nous renvoyait le premier Gentzen à travers l'appellation *Déduction naturelle* ne l'engageait que très modérément par rapport à ce problème philosophique de la «rencontre» de la logique avec la nature<sup>18</sup>. Si, en un sens, la naturalité du déducteur provient de son

<sup>18</sup> Conversement, rares sont les commentaires de Girard sur le «raisonnement naturel» et la «représentation intuitive des règles». A part les remarques ordinaires sur la forme peu intuitive des règles du Calcul des séquents (qui travaillent «du côté des hypothèses»), on

rattachement à la nature en tant qu'animal cognitif doté par l'évolution d'une «logique naturelle», elle n'induit aucun éclairage patent sur la «déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature» par ailleurs constatable (Wigner 1960), et ne contribue en rien à expliquer «l'absence de certitude sensible» afférente aux «mathématiques participant, à travers la physique, à la reconstruction théorique du monde»<sup>19</sup>.

En 1938, lorsque Gentzen publie son «État de la question des fondements», il reprend à son compte la conclusion de Weyl quant à la nature plurielle des mathématiques, qui juxtapose d'un côté la mathématique finitiste à la mesure de la «certitude sensible» et de «l'expérience mathématique», de l'autre la mathématique actualiste démesurée, «sans aucun espèce de “contenu de sens” du point de vue constructif» (Gentzen 1938a, Largeault 1992, p. 413), mais adaptée à la «reconstruction théorique de la nature».

Cette fac, on de voir, œcuménique, est emblématique de cette sorte de «défaitisme» provoqué par la faillite du projet hilbertien de justification absolue de «la logique au sens large» par la cohérence – défaitisme qui va faire office de consensus dominant pendant le demi-siècle qui va suivre, au moins pour ce qui concerne la manière d'envisager, sur fond d'incomplétude, la «relation» de la logique à l'actualiste nature.

En fait, cette fac, on de voir condense aussi les deux points cruciaux sur lesquels la critique radicale de Girard va s'exercer en vue de ce qu'il faut bien appeler la refondation girardienne – où la question des «fondements» prend, comme on va le voir, un tout autre sens.

Le premier de ces points est celui du statut de l'infini. Envisagé par Girard (puisant ici à l'inspiration gentzenienne) comme «infini dynamique», celui-ci est disséqué par une analyse fine des formes concrètes de l'interaction des règles qui l'engendre<sup>20</sup> – ces règles pour les «exponentielles» que l'analyse de la dynamique des preuves par la *Logique linéaire* a visibilisées

notera cependant (à propos de la complétion des tests requise pour renforcer la dualité preuves / modèles), le commentaire sur les «habitants» de l'hypothèse spécifique d'un raisonnement par l'absurde: ces démonstrations avec un mauvais «point de vue» d'un énoncé réfuté. «La vérité subjective nous offre ainsi un espace de réfutation de tous les énoncés, y compris des vérités démontrées» (Girard 2007, p. 523).

<sup>19</sup> «[...] il n'est [...] plus nécessaire, lorsque les mathématiques participent à travers la physique au processus de reconstruction théorique du monde, que ce qui est d'ordre mathématique soit isolable en une région particulière de la certitude sensible», Hermann Weyl (1931) cité par (Gentzen 1938a) traduction (Largeault 1992, p. 412).

<sup>20</sup> Dans un monde borné en temps et espace, il n'y a pas de différence expérimentable entre un processus effectivement infini et un processus d'une complexité qui excède celles des bornes, autrement dit dont la terminaison requiert de consommer des ressources temporelles et spatiales excédant celles du monde. L'expression «infini dynamique» peut dès lors indifféremment désigner les dynamiques effectivement infinies ou des dynamiques finitaires hypercomplexes qui en sont indiscernables.

(Girard 1987), puis décomposées jusqu'à faire apparaître des niveaux de complexité dynamique intermédiaires « naturels » (Girard 1998, Danos & Joinet 2003) caractérisant des classes de complexité algorithmique faible données (mais encore assez vastes pour qu'itérer y soit encore possible, autrement dit assez vaste pour qu'y survivent les entiers). Ces strates dynamiques sont *naturelles* non seulement au sens où leur niveau de complexité est engendré et non pas décrété (les évaluations auxquelles les systèmes logiques en question peuvent donner lieu, autrement dit leur pouvoir de représentation, est borné *par nature*, en vertu seulement de la procéduralité des règles), mais aussi au sens où l'ensemble de processus que chacun de ces niveaux d'infini dynamique forme un système calculatoire où la police de l'évaluation (stratification...) qu'induisent les règles, n'entravent pas l'interaction ni n'obèrent les propriétés logico-sémantiques essentielles que sont la terminaison, la confluence, la cohérence calculatoire et la possibilité de la représentation (présence des booléens et des entiers)<sup>21</sup>. Cette identification d'un infini mesuré, émergeant naturellement – à mettre en contraste avec l'infini *postulé* de la théorie des ensembles – n'est que l'un des leviers de la déconstruction girardienne du credo « essentialiste » en une nature dont le *Grand livre* aurait été écrit en langage ensembliste. Ce même impératif de contournement de l'*ensemblisme* (et de son interface imposée) est réaffirmé fréquemment par Girard, logicien scélérat (Mosca 2005), par exemple lorsqu'il se gausse des treillis ortho-modulaires des artisans de l'ancienne « logique quantique » (qu'il compare à Xersès, inventeur de la flagellation pour mer indocile : « on marque ainsi une réprobation très fré-géenne devant “l'erreur” commise par la nature », coupable de n'être pas ensembliste, pour aussitôt inviter le logicien à se mettre plutôt « à l'école de la nature » (Girard 2007, p. 407-408).

Pour autant, il ne s'agit pas pour Girard de remplacer le langage ensembliste par un autre, mais plus radicalement, en amont – et c'est le deuxième point – de revenir sur le statut même de ce *langage* dans lequel le *grand livre* est censé être écrit. Pour démonter l'apparente impossibilité d'une rencontre des mathématiques et du monde, Girard commence par briser leur face-à-face : il déconstruit la part *mythique* de la distinction entre « syntaxe » et « sémantique » (preuves et interprétations) en se plaçant au point de vue unificateur des processus (une preuve, c'est un processus de recherche de preuve qui réussit ; une contre-interprétation, c'est un processus de recherche de preuves qui échoue). Pour comprendre comment cette unification ne sombre pas dans l'aporie herméneutique (l'abolition de la distinction entre le langage et le monde, où tout devient signe, source d'interprétation et de signification), il importe de saisir le statut inhabituel du langage logique

<sup>21</sup> Pour une présentation raisonnée de ces propriétés logico-sémantiques essentielles et de leurs enjeux, cf. Joinet (2009).

dans ce contexte, à savoir celui d'une construction émergente, seconde par rapport à l'interaction processuelle et indépendante de tout présupposé quant à la vérité ou la fausseté : ainsi une formule (qu'on peut envisager, pour guider l'imagination, comme ultérieurement définie par un ensemble de règles de manipulation attachées aux connecteurs qui la structurent) est vu comme un « type », c'est à dire un ensemble de processus (ou de stratégies) qui, situations rares dans la nature, réagissent adéquatement à tous les tests<sup>22</sup>. Il est crucial ici d'observer que le caractère second, émergent, *a posteriori*, des règles logiques, invite à être prêt, à l'issue de l'entreprise de *reconstruction géométrique* (Girard 2007a) de la logique (à l'heure où est écrit cet article, accomplie de façon vraiment satisfaisante seulement pour la partie « perfective » de la logique), à toutes les éventualités... y compris celle d'avoir à contredire, au terme de la reconstruction, les bonnes vieilles règles de la logique classique.

Ces investigations girardiennes sur la *nature de la logique*, cette longue descente de la *logique naturelle* de Gentzen vers ses « sous-sols » (Girard 2006), jusqu'aux formes protologiques de l'interaction (Joinet 2011) et à ces principes, rejoignent ce qu'on pourrait appeler, en un sens à mon avis non métaphorique, une *logique de la nature*. En effet, avec la conception girardienne, la vision appelons-la « cybernétique » de la logique, prédominante dans le paradigme cognitiviste contemporain (le raisonneur comme architecture computationaloreprésentationnel issue de l'évolution, autonome face au monde et doté par la vertu de son organisation d'une faculté de raisonnement – le raisonnement naturel – régie par des lois que le logicien explicite) se voit remplacée par une approche du logique radicalement différente. Indépendamment de tout centre cognitif organisé de représentation et de traitement de l'information, la logique apparaît comme le produit émergent de l'interaction calculatoire, envisagée *per se*. Ce n'est pas en partant à la recherche du raisonnement naturel, mais en partant à la rencontre du calcul (en analysant ses formes possibles et en dégageant ses conditions de possibilité) que le logicien se confronte à la nature. Nul besoin pour cela d'un raisonneur (ni d'un calculateur) naturel. En effet, sous le regard de l'informatique théorique contemporaine, l'interaction calculatoire apparaît diffractée en interactions élémentaires et locales, effectuées en parallèles ; elle est phénomène décentralisé, indépendant de tout centre organisé de représentation cognitive. Elle résulte des interactions élémentaires réelles ou, si elle est objet théorique, simplement possibles, soumises seulement aux contraintes physiques de la transmission et de la structuration

<sup>22</sup> Ces travaux de Girard forment le chapitre *Ludique* de son œuvre, dont la première présentation fut donnée dans (Girard 2001). Au premier abord, le domaine est ardu et semble plus clairement accessible (ainsi que les considérations sur le dialogue avec la physique quantique) via l'exposé proposé dans Girard (2007).

de l'information et à la pulsation concurrente, et souvent divergente, des actions et des réactions.

## Remerciements

Le présent article s'inspire d'une conférence donnée pour la première fois lors des *Journées de Rochebrune* de janvier 2013, sous le titre «Preuve naturelle et nature de la preuve, de G. Gentzen à J.-Y. Girard». Sa rédaction a été finalisée en mars 2014, lors d'un séjour de recherche à l'*Instituto de Lógica e Filosofia da Linguagem* de l'université PUC à Rio de Janeiro, à l'occasion d'une invitation en tant que "Professor visitante do exterior" financée par le Ministère brésilien de l'Enseignement Supérieur (Bolsista sênior CAPES-Brasil).

## Références

- [1] BROUWER, L.E.J. (1908), De Onbetrouwbaarheid der logische Principes, *Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, P. Noordhoff, Groningen, 152–158.
- [2] CARDONE, F. & HINDLEY, J. R. (2009), History of  $\Lambda$ -calculus and Combinatory Logic, in Gabbay, D. and Woods, J. (eds), *Handbook of the History of Logic, Volume 5. Logic from Russell to Church*, Elsevier, 2009, 723–817.
- [3] CAVAILLÈS, J. (1938), *Méthode axiomatique et formalisme – essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Hermann, Paris.
- [4] DANOS, V. & JOINET, J.-B. (2003), Linear Logic and Elementary time, *Information and Computation*, 183, 123–137.
- [5] FEYS, R. & LADRIÈRE, J. (dir). (1992), *Recherches sur la déduction logique de G. Gentzen*, (traduites et commentées), PUF, Paris.
- [6] GENTZEN, G. (1934), Untersuchungen über das logische Schließen (I), *Mathematische Zeitschrift*, 39 (2), 176–210.
- [7] GENTZEN, G. (1935), Untersuchungen über das logische Schließen (II), *Mathematische Zeitschrift*, 39 (3), 405–431.
- [8] GENTZEN, G. (1935a), Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Mathematische Annalen*, 112, 493–565.
- [9] GENTZEN, G. (1938), Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, *Mathematische Annalen*, 4, 19–44.
- [10] GENTZEN, G. (1938a), Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung, *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, 4, 5–18.
- [11] GIRARD, J.-Y. (1987), Linear Logic, *Theoretical computer science* 50, 1–102.
- [12] GIRARD, J.-Y. (1998), Light Linear Logic, *Information and Computation*, 143, 175–204.
- [13] GIRARD, J.-Y. (2001), Locus Solum, *Mathematical Structures in Computer Science*, 11, 301–506.
- [14] GIRARD, J.-Y. (2006), *Le point aveugle, tome 1*, Hermann, Paris.

- [15] GIRARD, J.-Y. (2007), *Le point aveugle, tome 2*, Hermann, Paris.
- [16] GIRARD, J.-Y. (2007a), La logique comme géométrie du cognitif, in Joinet, J.-B. (dir.), *Logique, dynamique et cognition*, coll. 'Logique, Langage, Sciences, Philosophie', Publications de la Sorbonne, Paris.
- [17] HOWARD, W. A. (1980), The formulae-as-types notion of construction, in Seldin J.P. & Hindley, J. R. (eds), *To H.B. Curry: Essays in combinatory logic, lambda calculus and formalism*, Academic Press, 479–490.
- [18] HILBERT, D. (1889), *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal in Göttingen. Teubner, Leipzig.
- [19] HILBERT, D. (1922), Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1, 1922, 157–177.
- [20] HILBERT, D. (1926), Über das Unendliche, *Mathematische Annalen*, 95.
- [21] JAŚKOWSKI, S. (1934), On the Rules of Supposition in Formal Logic, *Studia logica* (ancienne série), 1:5, 32.
- [22] JOINET, J.-B. (2009), Ouvrir la logique au monde, in Joinet, J.-B. (dir), *Ouvrir la logique au monde. Philosophie et mathématique de l'interaction*, coll. Visions des sciences, Hermann, Paris, 9–63.
- [23] JOINET, J.-B. (2011), Logique et métaphysique, in Conte, J. & Bauchwitz, O. F. (eds), *O que é Metafisica?*, Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal (ISBN 978-85-7273-730-2), 157–168.
- [24] JOINET, J.-B. (2014), Proofs, Reasoning and the Metamorphosis of Logic, in Hermann, E. and Pereira, L.-C. and de Paiva, V. (eds), *Advances in Natural Deduction – a celebration of Prawitz's work*, coll. Trends in Logic, volume 39, Springer, chap. 3.
- [25] KOTARBINŚKI, T., MARCISZEWSKI, W. & CZARNOTA, K. (eds) (1970), *Mała Encyklopedia Logiki*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich–Wydawnictwo. Wrocław, Warszawa, Kraków.
- [26] KREISEL, G. (1971), Review of the Gentzen Collected Papers, *Journal of Philosophy*, 68, n° 8, p. 240.
- [27] LARGEAULT, J. (dir.). (1972), *Logique mathématique–Textes*, Armand Colin, Paris.
- [28] LARGEAULT, J. (dir.). (1992), *Intuitionisme [sic] et théorie de la démonstration*, coll. Mathesis, Vrin, Paris.
- [29] MANGIONE, C. & BOZZI, S. (1993), *Storia della logica – da Boole ai nostri giorni*, Garzanti, 1993, Milano.
- [30] MCCALL, S. (ed). (1967), *Polish Logic 1920-1939*, Oxford University Press.
- [31] MENTZLER-TROOT, E. (2001), *Gentzen's Problem*, Birkhäuser, Basel.
- [32] MOSCA, A. (2005), Jean-Yves Girard, le logicien scélérat, *Critique*, vol. 61, n° 701, Paris, p. 743–757.
- [33] PRAWITZ, D. (1965), *Natural deduction. A proof-theoretical study*, Stockholm studies in philosophy series, Almqvist & Wiksell, Stockholm.
- [34] PRAWITZ, D. (2006), *Natural deduction. A proof-theoretical study*, Dover publications inc., Mineola, New-York.
- [35] SZABO, M.E. (ed). (1969), *Collected Papers of Gerhard Gentzen*, coll. Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam.
- [36] VIHAN, P. (1995), The last months of Gerhard Gentzen in Prague, *Collegium logicum*, Vol. 1, Vienna, 1–7.
- [37] WEIL, H. (1931), *Die Stufen des Unendlichen*, Iena.

- [38] WIGNER, E. (1960), The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, in *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XIII, 1–14.
- [39] Księga Pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego, Lwów, 7–10 IV 1927 (Actes du premier Congrès polonais de mathématiques, à Lwów, 7 oct. 1927), *Dodatek do "Annales de la Société Polonaise de Mathématique"*, Kraków, 1929.

Jean-Baptiste JOINET

Professeur à la Faculté de Philosophie de l'Université Jean Moulin (Lyon 3)

Institut de Recherches Philosophiques de Lyon (IRPhil, EA 4187, Lyon 3)

Centre Cavailles, USR 3608, CNRS-ENS Paris-Collège de France

Jean-Baptiste.Joinet@univ-lyon3.fr

[www-philo.univ-paris1.fr/Joinet/NEW/](http://www-philo.univ-paris1.fr/Joinet/NEW/)