

## DEDUCTION ET TRIVALENCE

Georges PLANAVERGNE

10 avril 1974

5 Allées Marie Clémence

13004 Marseille (France)

On appelle logique trivalente toute logique ayant pour domaine d'interprétation  $D$  tel que:

$$D = (1, 0, 2)$$

Dans le cadre de la logique des propositions, (1) désigne en général le VRAI, et 0 le FAUX. Je me propose de montrer dans cet article que la logique des propositions trivalentes admet deux relations de déduction, et non pas une seule comme en bivalence.

Dans la logique classique des propositions, on définit souvent sémantiquement la déduction de la façon suivante:

*Df. Biv.:*  $x \models y$  est valide ssi quand  $x$  est vrai  
 $y$  est vrai.

Cette définition est insuffisante en trivalence, comme le montrent les deux exemples ci-après:

1°) Soient une implication  $C'$  et une disjonction  $A$  dont les matrices sont: (conformément à l'usage, les colonnes de gauche désignent les valeurs des antécédents, et les lignes supérieures, celles des conséquents)

$C'$		1	0	2		$A$		1	0	2
1		1	0	2		1		1	1	1
0		1	1	2		0		1	0	2
2		1	1	1		2		1	2	2

Apparemment, les deux règles de déduction  $C'i$  et  $Ai$  sont valides, puisque quand  $p$  et  $q$  sont vrais,  $C'pq$  est vrai; et que la disjonction  $Apq$  est vraie quand au moins une des deux propositions  $p$  ou  $q$  est vraie.

$C'i$  :            Si  $x \models y$  , alors  $\models C'xy$   
 $Ai$  :             $x \models Axy$

Soit la démonstration:

(1)	$p$	Hyp.
(2)	$Apq$	$Ai, (1)$
(3)	$C'pApq$	$C'i, (1) - (2)$

Il est clair que la proposition (3) n'est pas une tautologie, puisque quand  $p = 0$  et  $q = 2$  on a:  $C'pApq = C'OAO2 = C'O2 = 2$ .

On peut résoudre provisoirement le problème en remplaçant la disjonction  $A$  de Lukasiewicz par la disjonction  $A'$  :

$A'$		1	0	2
1		1	1	1
0		1	0	0
2		1	0	2

Le calcul montre qu'en effet  $C'pA'pq$  est une tautologie. Mais la difficulté n'en demeure pas moins.

2°) Soit l'implication  $C$  de Lukasiewicz:

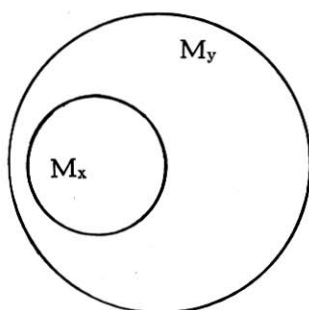
$C$		1	0	2
1		1	0	2
0		1	1	1
2		1	2	1

... et les deux règles de déduction:



trivalence. Elle signifie, du point de vue du calcul des classes utilisé métalinguistiquement, que l'ensemble  $M_x$  des modèles de  $x$  est inclus dans l'ensemble  $M_y$  des modèles de  $y$ .

$M_x \subset M_y$



Il se trouve que le calcul des classes nous permet d'exprimer cette relation d'inclusion de deux autres manières: avec la relation d'intersection et celle de réunion, respectivement:

$$M_x \cap M_y = M_x$$

$$M_x \cup M_y = M_y$$

En bivalence, deux fonctions, la conjonction  $K$  et la disjonction  $A$ , peuvent remplacer l'intersection et la réunion dans les égalités ci-dessus, lorsqu'on remplace les modèles des propositions par les propositions elles-mêmes. D'où les deux nouvelles définitions, équivalentes entre elles: (le signe d'égalité « $=$ » y désigne la relation d'équimatricité — qui est réflexive, symétrique et transitive)

$$\begin{array}{llll} x \models y & \text{ssi} & Kxy = x & \text{Df.Ab.K.:} \\ x \models y & \text{ssi} & Axy = y & \text{Df.Ab.A.:} \end{array}$$

Ces définitions deviendront équivalentes à «Df. Inc.» pour

une valence donnée, dès lors que seront fournies des matrices adéquates des fonctions K et A. Par exemple en bivalence avec les matrices:

$$\begin{array}{c|cc} K & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} A & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

A partir de «Df.Inc.», on peut dire que la déduction est une relation:

1°) *Transitive*: Si  $x \models y$  et  $y \models z$   
Alors  $x \models z$

2°) *Réflexive*:  $x \models x$

3°) *Antisymétrique*: Si  $x \models y$  et  $y \models x$   
Alors  $x = y$

4°) *Avec Supremum*:  $x \models V$   
(si V désigne une proposition tjrs vraie)

5°) *Avec Infimum*:  $F \models x$   
(si F désigne une prop. tjrs fausse)

6°) *Connexe* pour les propositions dont la matrice a partout la même valeur.

... puisque la relation d'Inclusion est elle-même Transitive, Réflexive, Antisymétrique, admettant un Supremum (la classe universelle) et un Infimum (la classe vide), et enfin étant Connexe pour ces deux dernières classes seulement.

En négligeant la clause 5 (nous verrons un peu plus loin pourquoi), on peut établir ces propriétés à partir des propriétés des fonctions K ou A, et en utilisant «Df.Ab.K.» ou «Df.Ab.A.»

1°) Si  $K$  est *Associative*, la déduction est *Transitive*:

Si  $Kxy = x$  (1) càd  $x \models y$

et  $Kyz = y$  (2) càd  $y \models z$

on a, par remplacement de (2) dans (1):

$$KxKyz = x$$

par associativité, il vient:

$$KKxyz = x$$

d'où par remplacement de (1):

$$Kxz = x \quad \text{càd} \quad x \models z$$

2°) Si  $K$  est *Idempotente*, la déduction est *Réflexive*:

$$Kxx = x \quad \text{càd} \quad x \models x$$

3°) Si  $K$  est *Commutative*, la déduction est *Antisymétrique*:

Si  $Kxy = x$  (1) càd  $x \models y$

et  $Kyx = y$  (2) càd  $y \models x$

Alors  $Kxy = y$  par commutativité dans (2)

$x = y$  par remplacement de (1)

4°) Si le VRAI est *Neutre* pour  $K$ , la tautologie est un *Supremum* pour la déduction:

$$Kx1 = x \quad \text{càd} \quad x \models V$$

5°) Si la fonction  $K$  n'introduit pas de valeur différente de celles de ses deux constituants  $p$  et  $q$ , la déduction a une *Connexité* restreinte aux propositions ayant partout même valeur.

Si nous avons utilisé la fonction  $A$  dans l'analyse ci-dessus

au lieu de K, les résultats auraient été les mêmes, sauf pour le 4° où pour qu'il y ait Supremum tautologique, le VRAI doit être Absorbant pour la disjonction.

A partir de ces propriétés exigées des fonctions utilisées dans «Df.Ab.K.» et «Df.Ab.A.», on peut construire des matrices adéquates pour n'importe quelle valence donnée, et en particulier pour la trivalence. Ce sont:

A	1	0	2		K	1	0	2
1	1	1	1		1	1	0	2
0	1	0	2		0	0	0	0
2	1	2	2		2	2	0	2

K'	1	0	2		A'	1	0	2
1	1	0	2		1	1	1	1
0	0	0	2		0	1	0	0
2	2	2	2		2	1	0	2

Appelons  $D_0$  la relation de déduction définie par le couple  $K/A$ , et  $D_2$  celle définie par le couple  $K'/A'$ : (x étant la prémisse et y la conclusion)

$$\begin{array}{ll}
 D_0 & \text{est valide ssi } Kxy = x \\
 & \text{ou } Axy = y \\
 D_2 & \text{est valide ssi } K'xy = x \\
 & \text{ou } A'xy = y
 \end{array}$$

En termes de valeurs de vérité, ces définitions deviennent:  $D_2$  est valide si quand x est VRAI, y est VRAI; et si, en outre, quand x est FAUX, y n'est pas TIERS —  $D_0$  est valide si quand x est VRAI, y est VRAI; et si, quand x est TIERS, y n'est pas FAUX. («tiers» signifiant «égal à 2»).

Il est vrai que si l'on entend respecter la clause 5 relative à l'Infimum, seule  $D_0$  est à proprement parler une relation de déduction ( $D_2$  ayant pour Infimum, non pas le FAUX, mais la valeur tierce 2). Mais d'autre part, on peut contester ce choix qui revient à exiger que toute déduction parte du FAUX seule-

ment — et on ne voit pas pourquoi il faudrait refuser à la relation définie par le couple  $K' / A'$  le caractère déductif, puisqu'elle permet tout aussi bien de construire des démonstrations.

Nous comprenons maintenant pourquoi notre première démonstration n'était pas valable: le calcul montre que la règle  $A_i$  n'est valide que pour  $D_0$ , tandis que les règles  $C'_i$  et  $A'_i$  ne sont valides que pour  $D_2$ . Quant à la deuxième démonstration, le calcul montre que  $C_i$  n'est valide que dans  $D_0$ , tandis que  $C_e$  n'est jamais valide dans aucune des deux relations de déduction.

Ce résultat est en fait très général: pour une valence donnée  $n$  ( $n \geq 2$ ), on peut toujours définir  $n - 1$  relations de déduction.

Marseille, le  
10-4-74